Δευτέρα 22 Μαΐου 2017

Σύνδεση με το νόμο του Newton

Σε ένα πεδίο δυνάμεων όλες οι δυνάμεις προέρχονται από ένα δυναμικό $V = V(x, \psi, z)$ και η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{z}^2)$, τότε

γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{z}^2) - V(x, \psi, z).$$

Τότε οι αντίστοιχες εξισώσεις Euler είναι

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x} &= 0 \\ -\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\frac{1}{2} m 2\dot{\psi} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{1}{2} m \cdot 2\dot{z} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_x \\[2ex] m\ddot{\psi} = -\dfrac{\partial V}{\partial \psi} = F_\psi \\[2ex] m\ddot{z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = F_z \end{cases}$$

, F_x, F_ψ, F_z οι αντίστοιχες συνιστώσες του πεδίου δυνάμεων

$$\vec{F} = -\nabla V = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial x}}_{F_x}\hat{i} \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial \psi}}_{F_\psi}\hat{j} \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial z}}_{F_z}\hat{k}$$

Γενίκευση της ορμής και ενέργειας

Είδαμε ότι ανσιαστικά ο νόμος του Newton
$\vec{F} = m\vec{a}$
με χρήση της αρχής του Hamilton γενικεύεται ως

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad L = L(q, \dot{q}, t)$$

Αν περιγράψαμε τη θέση ενός σώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες και ορίσαμε:
P_i την ορμή που αντιστοιχεί στη θέση x_i

με $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \psi \\ x_3 = z \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_1 = P_x \\ P_2 = P_\psi \\ P_3 = P_z \end{matrix}$

Τότε $\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\ddot{x}_i \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \end{matrix}\right\}$ ώστε $m\ddot{x}_i = F_i$

ή αν η μάζα δεν είναι σταθερή $\frac{dP_i}{dt} = F_i$

Ορισμός: Για κάθε συντεταγμένη q_i του φυσικού συστήματος ορίζουμε την αντίστοιχη γενικευμένη ορμή ως $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

και αντίστοιχα η ποσότητα $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

είναι η γενικευμένη δύναμη.

Γιατί; Εξίσωση Euler: $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

Νόμος Newton : $F - \frac{d}{dt} P = 0$

Με τον τρόπο αυτό δεν γενικεύουμε απλώς το 2ο Νόμο Newton που αποκτά ισχύ σε κάθε σύστημα συντεταγμένων αλλά γενικεύονται και φυσικά μεγέθη όπως η δύναμη κ η ορμή.
Με τον ίδιο τρόπο γενικεύουμε και την έννοια της ενέργειας.

Εισάγαμε την ποσότητα:
$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q}, t) \ (= H)$$
που ονομάζεται ολοκλήρωμα του Jacobi ή Hamiltonian (Χαμιλτονιανή)

και αποτελεί την άμεση γενίκευση της ενέργειας.
Γιατί; Η συνάρτηση Lagrange για συστήματα που έχαμε μελετήσει δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο.
Πράγματι $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$

$\rightarrow$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) - V(q_1, q_2, q_3)$$

Δηλαδή

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \cancel{\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} + \dot{q}_i \underline{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} - \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t}$$

$$= \underline{\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i}} + \cancel{\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\dot{q}_i \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{0} = 0$$

Εξίσωση Euler

Δηλαδή η ποσότητα που όρισα ως γενικευμένη ενέργεια διατηρείται. Αντιστοιχεί λοιπόν ο νόμος που γράψαμε στη διατήρηση της ενέργειας.

Πρώτα ολοκληρώματα

Η εξίσωση Euler είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και προφανώς χρειάζονται να προσδιοριστούν δυο ανεξάρτητες σταθερές. Σε ειδικές περιπτώσεις που η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται από μια από τις μεταβλητές $t, q, \dot{q}$ η αντίστοιχη εξίσωση Euler απλοποιείται άμεσα.

Θεωρούμε τις περιπτώσεις:

1) $L = L(q, t)$, άρα $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$ και άρα $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ →

που είναι <u>αλγεβρική εξίσωση</u>

2) $L = L(t, \dot{q})$, άρα $\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = c$

επίσης αλγεβρική εξίσωση.

3) $L = L(q, \dot{q})$, και διατηρεί την $E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$

Οι δύο εξισώσεις $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = c$ και $E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$

ονομάζονται ολοκληρώματα κίνησης
ή πρώτα ολοκληρώματα.
Γιατί! Είναι οι δύο πρώτες ποσότητες που αντιστοιχούν
σε νόμους διατήρησης!
Δηλαδή προέρχονται από τις $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$

Γενικά ορίζουμε ως πρώτο ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης $F = F(x, \psi, \psi', \psi'') = 0$ την $g = g(x, \psi, \psi')$
με $\frac{dg}{dt} = 0$ αν ψ είναι λύση της εξίσωσης.

<u>Παραδείγματα</u>

<u>Κίνηση σε μια διάσταση</u>

Από το νόμο του Newton γνωρίζουμε ότι
$m\ddot{x} = F$, και $F = -\frac{dV}{dx}$

άρα $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \quad \times \dot{x} \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}\frac{dV}{dx}$

ολοκληρώνω $m\int \dot{x}\ddot{x}\,dt = -\int \dot{x}\frac{dV}{dx}\,dt$

$\longrightarrow$

$$m\cdot\frac{1}{2}\dot{x}^2=-\int\frac{dV}{dx}dx=-V+c$$

$$\dot{x}\,dt=\frac{dx}{dt}\cdot dt=dx$$

<u>Συνολικά</u>: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)=c$

άρα το πρώτο ολοκλήρωμα είναι η ενέργεια.

Η γενίκευση των εξισώσεων Euler σε δύο διαστάσεις.
Έστω R κλειστό χωρίο στο επίπεδο (x,ψ).
Θεωρώ συναρτήσεις $u=u(x,\psi)\in C^2(R)$
(συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς & τις δεύτερες παραγώγους τους στο R).
$\Gamma=\partial R$ σύνορο του R.
Ζητάω τα ακρότατα του:

$$J[u]=\iint_R L(x,\psi,u,u_x,u_\psi)\,dx\,d\psi$$

Κατά τα γνωστά θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων
$u(x,\psi,a)=u(x,\psi)+a\eta(x,\psi)$
$\eta(x,\psi)\in C^2(R)$ και $\eta(x,\psi)=0$ στο Γ.
Τότε

$$\left.\frac{\partial J}{\partial a}\right|_{a=0}=\frac{\partial}{\partial a}\iint_R L(x,\psi,u+a\eta,u_x+a\eta_x,u_\psi+a\eta_\psi)\,dx\,d\psi$$

$$=\iint_R\left(\frac{\partial L}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial u_x}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial u_\psi}\frac{\partial u_\psi}{\partial a}\right)dx\,d\psi$$

$$=\iint_R\left(\eta\frac{\partial L}{\partial u}+\underline{\eta_x\frac{\partial L}{\partial u_x}}+\underline{\eta_\psi\cdot\frac{\partial L}{\partial u_\psi}}\right)dx\,d\psi$$

Γράφουμε $\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\cdot\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)=\underline{\eta_x\frac{\partial L}{\partial u_x}}+\eta\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x}$

→

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\left(n \cdot \frac{\partial L}{\partial u_\psi}\right) = \underline{n_\psi \frac{\partial L}{\partial u_\psi}} + n \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial L}{\partial u_\psi}$$

$$n_x \frac{\partial L}{\partial u_x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(n \frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - n \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial L}{\partial u_x}$$

$$n_\psi \frac{\partial L}{\partial u_\psi} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(n \cdot \frac{\partial L}{\partial u_\psi}\right) - n \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial L}{\partial u_\psi}$$

Αντικαθιστώ και

$$\left.\frac{\partial J}{\partial a}\right|_{a=0} = \iint_R \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial L}{\partial u_\psi}\right) n \, dx \, d\psi \; +$$

$$+ \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(n \frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(n \frac{\partial L}{\partial u_\psi}\right)\right] dx \, d\psi$$

Εστιάζω στο δεύτερο ολοκλήρωμα.
Χρησιμοποιώ Θεώρημα Green

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial \psi}\right) dx \, d\psi = \oint_{\partial R} P dx + Q d\psi$$

Στο σύνορο η συνάρτηση $n = n(x,\psi)$ είναι μηδέν
άρα και το δεύτερο ολοκλήρωμα.
Τότε αν $\left.\frac{\partial J}{\partial a}\right|_{a=0} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial L}{\partial u_\psi} = 0}$$

$\longrightarrow$

<u>Παρατήρηση</u>: (για το Θεώρημα Green.)

Έστω $Q = x$, $P = 0$ $\qquad \underbrace{\iint_R dx\,dy}_{A} = \oint_{\partial R} x\,dx$

Έστω $Q = 0$, $P = -\psi$ $\qquad \underbrace{\iint_R dx\,d\psi}_{A} = -\oint_{\partial R} \psi\,d\psi$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint -\psi\,dx + x\,d\psi}$$

π.χ. Από 2 μεταβλητές σε 1
$x = x(t)$
$\psi = \psi(t)$

Αντικαθιστώ κατευθείαν $A = \frac{1}{2}\oint -\psi dx + x d\psi$

και βρίσκω κατευθείαν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα